Dowód: $J = O(d^2)$

Niech $C(t)$ będzie gładką (przynajmniej dwukrotnie różniczkowalną) krzywą zdefiniowaną na przedziale $[0, d]$. Rozwinięciem Taylora w punkcie $t = 0$ otrzymujemy:

$$C(t) = C(0) + C'(0)t + \frac{1}{2}C''(0)t^2 + O(t^3),$$

oraz

$$C(d) = C(0) + C'(0)d + \frac{1}{2}C''(0)d^2 + O(d^3).$$

Odcinek łączący punkty $C(0)$ oraz $C(d)$ opisujemy równaniem:

$$L(t) = C(0) + \frac{t}{d}\Big[C(d) - C(0)\Big] = C(0) + C'(0)t + \frac{1}{2}C''(0)t\,d + O(d^2).$$

Błąd przybliżenia, czyli różnica między krzywą a odcinkiem, wynosi:

$$E(t) = C(t) - L(t) = \frac{1}{2}C''(0)(t^2 - td) + O(d^3).$$

Aby znaleźć maksymalną wartość błędu, maksymalizujemy $|t^2 - td|$ dla $t \in [0, d]$. Obliczamy pochodną:

$$\frac{d}{dt}(t^2 - td) = 2t - d = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{d}{2}.$$

Podstawiając, otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d}{2}\,d\right| = \left|\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2}\right| = \frac{d^2}{4}.$$

Stąd największy błąd wynosi:

$$J \approx \frac{1}{2}|C''(0)|\frac{d^2}{4} = \frac{|C''(0)|}{8}\,d^2.$$

Czyli,

$$J = O(d^2).$$

Uwaga: W przypadku krzywych zawierających ostre zakręty, metoda próbkowania gwarantuje, że punkt znajduje się dokładnie na zakręcie. Wówczas każdy odcinek A_nA_{n+1} leży na gładkim fragmencie krzywej, a powyższy dowód stosuje się do każdego takiego fragmentu osobno.